楕円関数の電力分野への応用の現状と展望
～　方法の転換：計算の代わりに思考する　～

千　葉　大　学　　木　下　　　遥[1]
（株）ビスキャス　　渡　辺　和　夫[2]

Current State and Future Prospect of Applications of Elliptic Function to Electric Power Field

H. Kinoshita,　and　K. Watanabe

楕円関数はこれまで物理や工学の分野では広く応用されてきているが，一般に敬遠されがちな傾向にあることも否めない．そこで，本稿では，楕円関数の電力分野における応用例，とりわけ電力ケーブル関連問題への楕円関数を用いた等角写像の活用の現状と今後の展望について紹介する．現在のコンピュータによる数値計算の主流の中にあって，あえて「計算の代わりに思考する」というリーマンの根本原理[1)]に立ち戻って，楕円関数による解析の有用性とそのシンプルでエレガントな美しさを再認識したい．

This paper deals with the current state and future prospect of applications of elliptic function to the electric power and energy field. In particular, practical use of conformal mapping technology by elliptic function is introduced for electric power cables.

Returning to Riemann's basic principle of “ thinking instead of calculation ”, against the main current of numerical calculation, we have a new understanding of elliptic function analysis for usefulness and the attraction in terms of simplicity and elegance.

1．ま　え　が　き

一重周期関数である三角関数に対して，楕円関数は二重周期関数，すなわち周期を二つ持った有理型関数として定義される．楕円関数はこれまで物理や工学の分野では，たとえば有限長ソレノイドのインダクタンス算出式の長岡係数に，振り子の等時性の記述および電荷重畳法による電界計算等に広く応用されてきたが，一般に敬遠されがちな傾向にあることも否めない．本稿では，楕円関数の電力分野における応用例，とりわけ電力ケーブル関連での等角写像への活用の現状と今後の展望について紹介する．現在のコンピュータによる数値計算の主流の中にあって，敢えて「計算の代わりに思考する」というリーマンの根本原理[1)]に立ち戻って，楕円関数による解析の有用性とそのシンプルでエレガントな美しさを再認識したい．

2．楕円関数について

楕円関数の誕生は1827年といわれ，19世紀に多くの数学者によって盛んに研究され「19世紀数学の華」と言われた[2) 3)]．楕円関数は広義には楕円積分も含まれ周期を二つもった有理型関数，すなわち二重周期関数として定義される．

本稿で扱う楕円積分と楕円関数を図1に，一般的な定義を図2に示す．一方，これまでわれわれが慣れ親しんできている三角関数は2πという周期を一つもつ一重周期関数である．従って，三角関数と楕円関数の共通点は周期関数であることにある．昭和11年の竹内端三氏の名著「楕円関数論」[2)]の緒言の一節には次のように書かれている．

「………いつまでも楕圓函數を敬遠して居るべきではあるまい，理論上にも實用上にも之を恰かも三角函數の如くに自在に利用して然るべきである」と．

3．楕円関数の物理・工学への応用例

身近な例としては有限長ソレノイドのインダクタンスを求める式に長岡係数として使われている[4)]．また，力学における振り子の等時性の運動の記述[5)]，流体力学や航空力学における平面翼の揚力に対する風洞壁の干渉や地面効果[3)]にも楕円関数が用いられている．

現代では，通信ケーブルおよび電線の特性解析[6)]，板

1　大学院 工学研究科 人工システム科学専攻電気電子系コース
博士前期課程
2　技術本部 品質管理推進室長（工学博士），
千葉大学大学院 工学研究科 客員教授兼任

省略語・専門用語リスト

省略語・専門用語	正式表記	説　明
リ ー マ ン	Georg Friedrich Bernhard Riemann	人名，19 世紀を代表するドイツの偉大な数学者．創出されたリーマン幾何学はアインシュタインの一般相対性理論の基盤となったことで有名である．
ケーブルコア	Cable Core	ケーブルの導体・内部半導電層・絶縁体・外部半導電層までの半製品．
ＣＶ ケーブル	Crosslinked Polyethylene Vinyl Sheathed Cable	架橋ポリエチレン絶縁ビニールシースケーブルの略．絶縁体材料が架橋ポリエチレン．導体・内部半導電層・絶縁体・外部半導電層・シースが同心円状となっている．
扇形ＣＶケーブル	Crosslinked Polyethylene Vinyl Sheathed Cable with Sector Form Core	導体・内部半導電層・絶縁体・外部半導電層・シースが扇形のＣＶケーブル．形状は非回転対称体となっている．
ワイヤーシールド	Wire Shield	ＣＶケーブルの外部半導電層と最外層のシース間に設ける金属遮へい層で，多数本の銅線がらせん状に巻かれたもの．

楕円積分：$\int R\{z,\ \sqrt{\psi(z)}\}dz$　　楕円関数

(Legendre-Jacobiの標準形)

第一種：$u=\int\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$　⟷ 逆関数 ⟷　z=snu Jacobiの楕円関数

第二種：$u=\int\sqrt{\frac{1-k^2z^2}{1-z^2}}\,dz$　……楕円の弧長

第三種：$u=\int\frac{dz}{(z^2-a^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$　（k：母数　a：パラメータ

(Weierstrassの標準形)

第一種：$u=\int\frac{dz}{\sqrt{4z^3-g^2z-g^3}}$　⟷ 逆関数 ⟷　z=δ（u） Weierstrassのδ関数 （ペー）

第二種：$u=\int\frac{zdz}{\sqrt{4z^3-g^2z-g^3}}$

第三種：$u=\int\frac{dz}{(z-a)\sqrt{4z^3-g^2z-g^3}}$

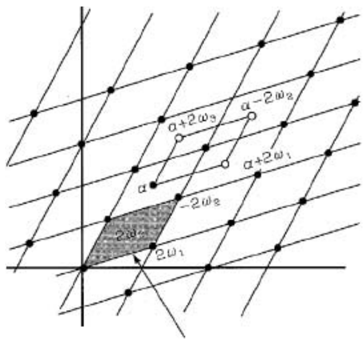
＊積分範囲が0〜1の場合を完全楕円積分という。

図 1　楕円積分と楕円関数の分類
Fig. 1. Classification of elliptic integral and elliptic function.

$f(z+\Omega)=f(z)$, $\Omega=k\omega+k'\omega'$
$(k, k'=0, \pm1, \pm2, \ldots\ldots)$

⇩

f (z) is doubly periodic function with fundamental periods of ω and ω '. (elliptic function)



Fundamental periodic parallelogram

図 2　楕円関数の一般的な定義
Fig. 2. General definition of elliptic function.

状電荷重畳法による外円筒同軸系の電位分布および静電容量計算[7]並びにマイクロ波理論における矩形同軸線路特性インピーダンス計算[8) 9)]にも楕円関数による等角写像が用いられている．また，金属表面めっき技術におけるハルセル（Hull Cell）の電流分布計算[10]，図 3 に示す戸田格子の解析[11]や暗号理論[12]にも楕円関数が利用され脚光を浴びている．

4．楕円関数の電力分野への応用の現状

4．1　電界計算への応用

電荷重畳法や表面電荷法で回転対称場の問題を解析しようとすると，リング電荷を用いるため，必ず第一種，二種完全楕円積分を計算しなければならない．この完全楕円積分の高精度計算手法が提案されてきている[13]．

4．2　等角写像による二次元抵抗値計算の基本過程

任意形状の二次元抵抗値の等角写像による計算方法を図4に示す．任意形状の単連結抵抗領域の周辺に任意の二つの電極が取り付けられた場合の電極間抵抗値は，逐次写像により最終的に長方形領域に写像され，対向する平行電極間抵抗値となる．複素上半平面からこの長方形領域に写像する働きが第一種楕円積分であり，逆に，長方形から上半平面に写像する働きが，その逆関数であるJacobiの楕円関数である．リーマンの写像定理「複素平面上の二つの任意の単連結領域間には1対1に等角写像する解析関数が必ず存在する」によれば，単連結領域で表せるすべての問題はその解が統一的に次のシンプルな一つの式で表されることを示している．

R＝C×K’/K　・・・・・・・・・・・・・・(1)

ここに，C：定数，K，K’：母数k，補母数k’に対する第一種完全楕円積分

この電流界での計算は熱流体や流体での計算にも適用できる．以下に応用例を述べる．

4．2．1　電流界（電気抵抗）への応用

電力ケーブル分野への応用例を述べる．

(1) ＣＶケーブル半導電層抵抗率の新規な測定方法 [14)]

図5に示すようにケーブルコアの状態で，外部半導電層の抵抗率ρをコアの端部に触れるのみで，非破壊で測定する簡便な新しい方法が提案されている．この証明の過程で，円筒状半導電層が平面に展開され，いくつかの写像を経て図4に示す長方形領域に第一種楕円積分により写像され，問題が解かれた．さらに，微分・位相幾何学的観点から，この新測定法は扇形ＣＶケーブルのよう

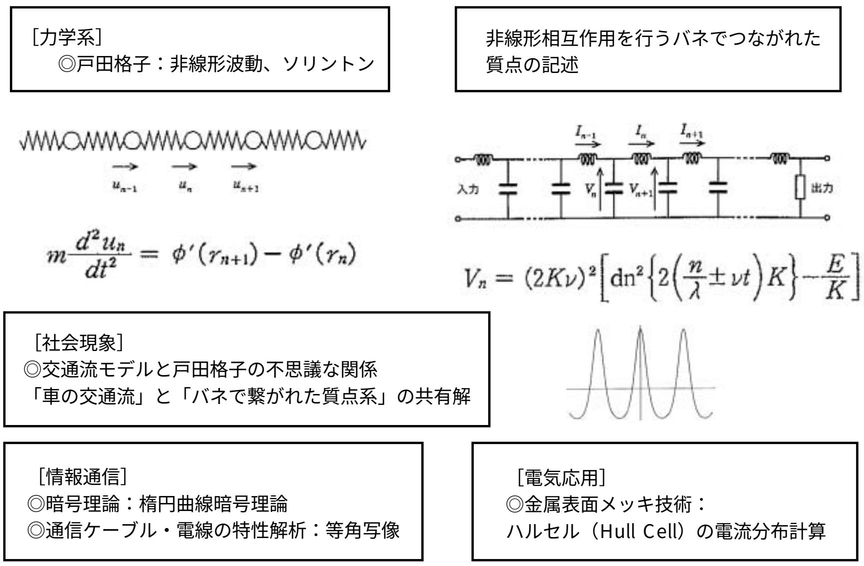


図3　最近の代表的な楕円関数応用例
Fig. 3. Recently applied examples of elliptic function.

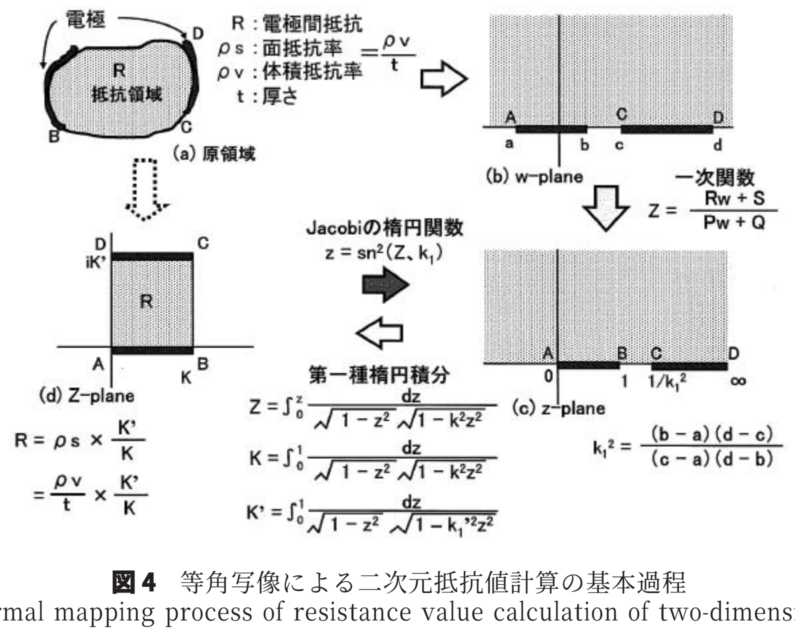


図4　等角写像による二次元抵抗値計算の基本過程
Fig. 4. Conformal mapping process of resistance value calculation of two-dimensional regions.

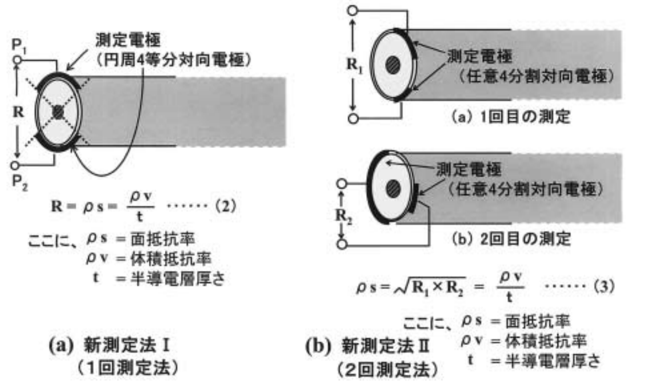


図 5　CV ケーブル半導電層抵抗率の新測定法の提案
Fig. 5. Newly proposed measuring methods of resistivity.

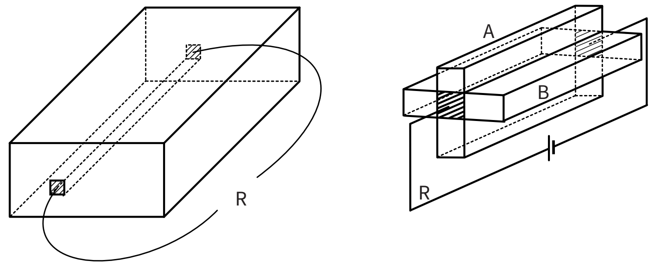


図 6　直方抵抗体 (左) とクロス柱抵抗体（右）
Fig. 6. Rectangular column resistor and cross column resistor.

な非回転対称体の半導電層へも拡張できると報告されている．

（2）電力ケーブル付属品の一構成物の抵抗値計算 [15) 16)]

電力ケーブル機器のある種の電気回路の一部には直方抵抗体と見なせる構成要素が入る場合がある．この回路のインピーダンスを求める場合，まずこの直方抵抗体の直流抵抗を求めることが必須である．図 6 に示す直方抵抗体の両端面上のある種の任意電極間抵抗値の上界の近似値をクロス柱抵抗体の抵抗値として推定している．この計算に第一種完全楕円積分と Jacobi の楕円関数が使用されている．その写像過程の一部が図 7 に示されている．

4．2．2　熱流界（熱抵抗）への応用

電力ケーブルの許容電流設計には各部の熱抵抗計算が必須となる．

（1）CV ケーブルの熱抵抗計算 [17)]

ワイヤシールド層を有する CV ケーブルで，ワイヤシールド間に空隙が存在する場合は，半径方向の熱流分布はワイヤシールド部と空隙部では不均一となる．このワイヤシールドへの熱流の集中を反映した熱抵抗計算方法が提案されている．

（2）直埋ケーブルの土壌熱抵抗計算 [18)]

線状発熱体に対して適用される Kenelly の式が適用できない帯状の面状発熱体に対して，第一種完全楕円積分を用いた等角写像により熱抵抗計算式が導出されている．

4．2．3　流体の流れ（透湿抵抗）への応用

ＣＶケーブルの水トリー劣化対策として適用されている金属ラミネート遮水シースの透湿係数計算式へ応用されている [19)]．この金属ラミネートシースの遮水効果を定量的に表す指標として，シース部とラップ部の透湿係数がそれぞれ定義され計算式が与えられている [20)]．このうち，シース部の透湿係数（Ｇｓ）の式はその導出過程が必ずしも明確でない．そこでＧｓの理論計算式に楕円積分と楕円関数を用いた等角写像を応用し，新たな式が導出されている．

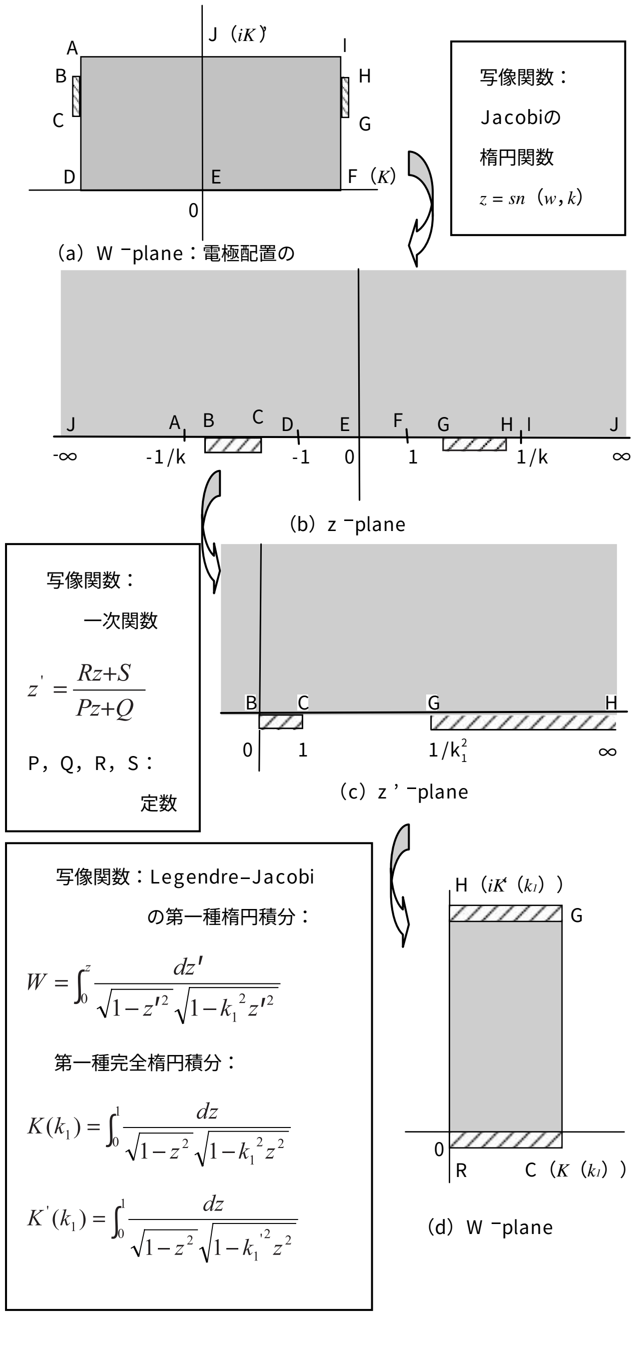


図 7　図６右図の交叉直方抵抗体Ａ，Ｂの抵抗導出の写像過程
Fig. 7. Calculation process of resistance for rectangular column resistor A & B.

5．今後の展望

不思議な魅力をもつとされる[5] 楕円関数，その応用の今後の展望については，大きな二つの流れがあると筆者等は考えている．

5．1　複素変数関数としての応用から微分・位相幾何学的側面からの応用へ

まず，古典的な応用例に見られる実変数関数の扱いから現代の複素変数関数としての応用を経て，今後は楕円関数の微分・位相幾何学的側面[21] からの応用も期待されよう．例えば，他の物理の分野（素粒子論）における超ひも理論では，素粒子の生涯の顔が楕円関数のリーマン面と同一になると言われている[22]．工学の分野においてもこのようなアプローチが出てこないものであろうか．そこまではいかないまでも，ポテンシャル論における境界値問題として図８に示す Dirichlet and Neumann の問題の応用例も少なくないであろう．Dirichlet 問題[23] とは，単連結領域において Laplace の方程式を満たすいわゆる調和関数において，境界で指定された値をとるポテンシャル関数を求めることである．また，Neumann の問題[23] とは，境界において法線方向の偏導関数が指定された値をとる関数を求めることである．これらの問題に，楕円関数を用いた等角写像による解法が適用できる．もちろん熱流，流体の流れの問題にも適用可能である．

5．2　非線形問題への応用へ

戸田格子（非線形波動，ソリントン）の運動方程式の解析解を楕円関数を用いて初めて導出した戸田盛和氏は，その著書「楕円関数入門」[5] の前書きで，次のように述べている．

「三角関数，双曲線関数，調和関数，ベッセル関数などの特殊関数は，今までに広く使われてきたが，それは多くの場合，重ね合わせの効く方程式の解を求める問題に関してであった．漸化式，加法定理なども多くは線形である．一方，楕円円関数は非線形の加法定理をもち，重ね合わせの効かない問題に広い応用をもつもので，現在における非線形の問題を発展させるためには，楕円関数の性質から学ぶことが多いと考えられる．」

理工学の分野や社会現象などにおける非線形の諸問題の重要性が，最近ますます認識されるようになってきている．今後，楕円関数の非線形問題としての戸田格子方程式以外に，重ね合わせの効かない非線形問題への応用が期待されよう．

6．む　す　び

リーマンの根本原理「証明は計算ではなく単に思考によって片付けるべきである」すなわち「計算の代わりに思考する」という証明の方法の根本的改革が 1897 年のヒルベルトの著「数論報告」の中で明確に言及されている[1]．現在のコンピュータによる数値計算（ブラックボックス化）の主流の中でこの思想があらためて再認識されてこよう．本稿で扱った手法はその意味で問題の計算過程を単なる数式の変形あるいは数値処理としてとらえるのではなく，幾何学的（図形的）プロセスを経て解いていくもので，「計算の代わりに思考する」を受け継いだものである．さらに，①解がシンプルな式で統一的に表せる，②母数ｋがある範囲では市販の数値表を用いて手計算で簡単に計算できるので，設計や現場での計算に適しているなどの特長がある．数学誌「数学のたのしみ」[24] の中で戸田氏は「楕円関数をめぐって」のフォーラムを次の言葉で結んでいる．「楕円関数に習熟すれば，面白い世界がいくらでも広がるだろう．」

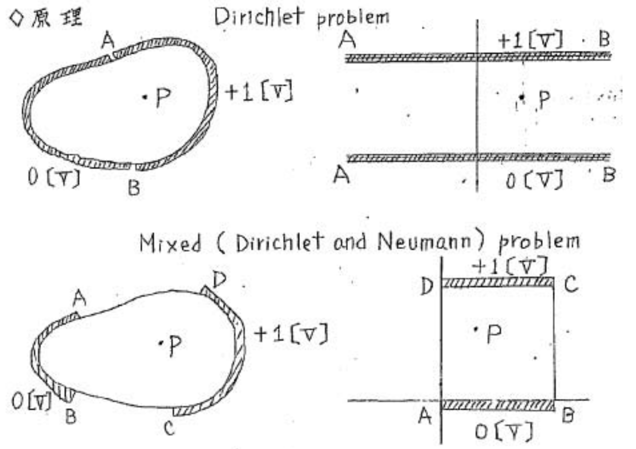


図 8　Dirichlet and Neumann の問題（寺門ノートより）
Fig. 8. Dirichlet and Neumann problem.

謝　辞

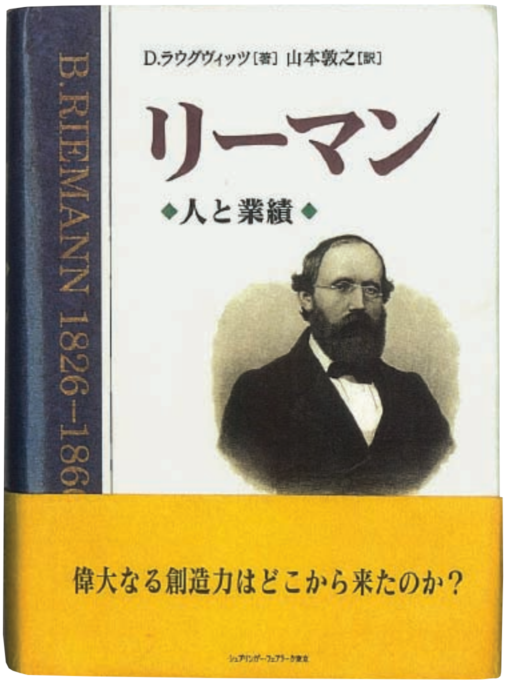
本稿は筆者の一人が元茨城大学寺門龍一教授（現名誉教授）に興味深く教えていただいた「電磁気学特論」を基盤としていることを付記して，同先生に深く感謝いたします．また，昨年急逝されました故千葉大学斎藤制海教授，さらに，平素からご指導戴いております千葉大学佐藤之彦教授，劉康志准教授，片根保先生，並びに元千葉大学榊陽教授（現名誉教授）に感謝いたします．終わりに，茨城大学在学時に電磁気学の基礎を熱心にご講義くださった故荒又光夫名誉教授にこの小解説論文を心より捧げます．

「幾何学は魂を真理に引き寄せ，哲学的精神を創造する」
－　プラトン　－
（数学のたのしみ 2005 春「楕円曲線：その魅惑の世界」）[24]

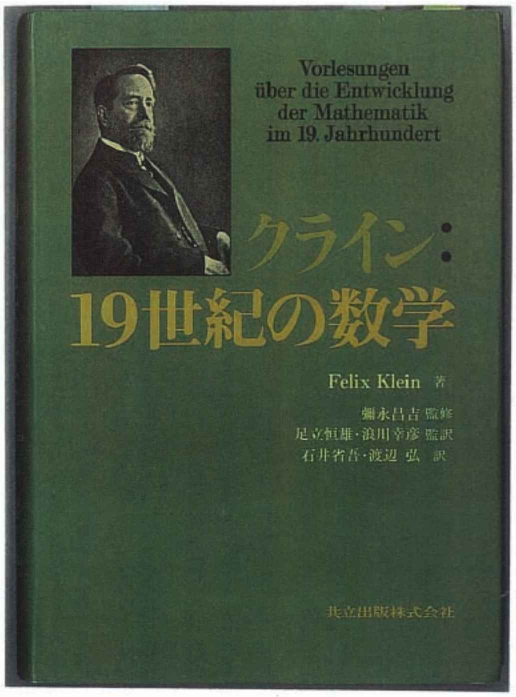
参　考　文　献

1)　山本　敦之訳：リーマン：人と業績，p.354，シュプリンガー，フェアラーク東京，1998
2)　竹内　端三：楕円函数論，岩波全書，p.31，1936
3)　友近　晋：楕円函数論，現代工学社，1942

4) 後藤，山崎：詳解電磁気学演習，pp.281-283，共立出版社，1970
5) 戸田 盛和：楕円関数入門，pp.22-25，まえがき，日評数学選書 2004
6) 荒川 輝明：「等角写像法によるケーブル・電線の解析」，電気通信大学学報より抜粋
7) 鶴田 浩一，寺門 龍一：「板状電荷重畳法による外円筒同軸系の電位分布及び静電容量計算」，電学論 A，102 巻，7 号，pp.375-380，1982
8) Ryuiti Terakado：“Characteristic Impedance of Rectangular Coaxial Line Ratio 2:1 of Outer-to-Inner Conductor Side Length”, IEEE, Trans. Microwave Theory Tech.,Vol. MTT-24, pp.124-125, Feb. 1976
9) H. J. RIBLET: “An Expansion of the Terakado Solution with an Application”, IEEE Trans. Microwave Theory Tech. , Vol.MTT-30, pp.2036- 2039, Nov. 1982
10) 寺門 龍一，長坂 秀雄：「ハルセル（HullCell）の電流分布に対する一考察」，金属表面技術 Vol.27，No.12，pp.676-680，1967
11) 梶原 健司：「戸田格子 新しい研究のゆりかご」，数学セミナー，Vol.47，No.3，pp12-15，2008
12) 伊豆：「楕円曲線暗号入門」，数学セミナー，Vol.46，No.7，pp13-19，2007
13) 里 周二：「完全楕円積分の効率的計算方法の提案」，電学論 A，研究開発レター，116 巻 10 号，1996
14) 渡辺 和夫：「楕円関数の電力ケーブル問題への応用（第一報）」，電学論 A，126 巻 9 号，2006
15) 渡辺 和夫，水野 健彦，横山 繁嘉寿，木下 遥：「直方抵抗体のある種の任意電極間抵抗値の上界近似ー 第一種完全楕円積分と Jacobi の楕円関数の応用ー 」，平成 20 年電学全大会 No.1-018，2008
16) 渡辺 和夫，水野 健彦，横山 繁嘉寿，木下 遥：「クロス柱抵抗体の抵抗値の近似計算ー 第一種完全楕円積分と Jacobi の楕円関数の応用ー 」，平成 20 年電学全大会 No.1-017，2008
17) 渡辺 和夫：「第一種完全楕円積分と Jacobi の楕円関数の CV ケーブル熱抵抗計算への応用例」平成 10 年電学全大会 No.1735，1998
18) 渡辺 和夫：「第一種完全楕円積分の直埋ケーブルと併設された帯状発熱体の土壌熱抵抗計算への応用例」，平成 10 年電学全大会 No.1736，1998
19) 渡辺 和夫：「金属ラミネート遮水シースの透湿係数計算式ー 第一種完全楕円積分と Jacobi の楕円関数の応用例ー 」，電学論 B，研究開発レター，119 巻 10 号，1999
20) 速水 敏幸：CV ケーブル，p.193，コロナ社
21) 樋口ほか：曲面上の函数論，森北出版，1997
22) 桂 利行：代数曲線，1 変数代数関数体，リーマン面，数理科学 7/1998，p.11，サイエンス社，1998
23) 例えば，井上正雄：ポテンシャル論，p.86，p.113，共立全書，1952
24) 上野，砂田，新井：数学のたのしみ「楕円曲線：その魅惑の世界」2005 春，p.126，数学とは何か，日本評論社，2005



参考文献 1）
1998 年 2 月 12 日発行
シュプリンガー・フェアラーク東京



参考文献 1）関連（数学史上の名著）
1996 年 3 月 1 日初版 2 刷発行
共立出版社